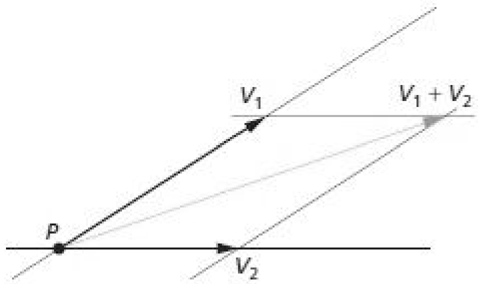
Modulo 3.1 – Elementi di statica

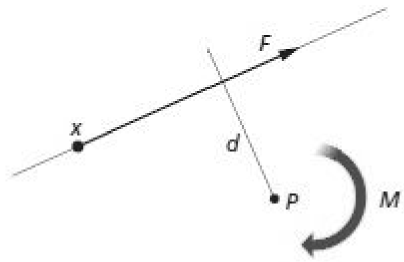
<u>Forze e momenti:</u> si definisce *forza* la causa della perturbazione dello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme di un corpo. La sua unità di misura è il newton (N) che scomposto in unità di misura fondamentali diviene

$$N=\frac{kg\,m}{s^2}$$

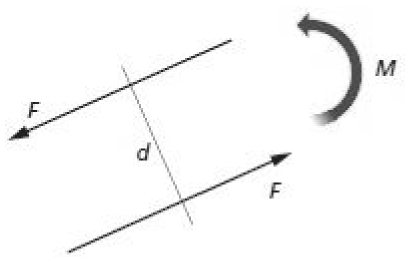
La forza è una grandezza *vettoriale* quindi ha una direzione, un modulo, un verso ed un punto di applicazione.
La *somma di due forz*e con lo stesso punto di applicazione si calcola con la regola del parallelogramma



Si definisce *momento* M di una forza F rispetto a un punto P il prodotto dell'intensità della forza per la distanza d del punto dalla forza. La sua unità di misura è il newton metro (Nm).



Una *coppia di forze* è un sistema formato da due forze che hanno uguale modulo, direzioni parallele e versi opposti



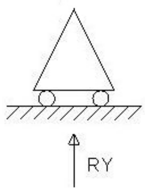
Il *momento* di una coppia di forze si calcola con la formula $M=F\cdot d$ dove F è l'intensità delle forze e d la loro distanza.

Vincoli: consideriamo una figura che si trova in un *piano cartesiano*; in assenza di vincoli essa ha *3 gradi di libertà* equivalenti a:

- un movimento di traslazione in direzione orizzontale
- un movimento di traslazione in direzione verticale
- un movimento di rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano

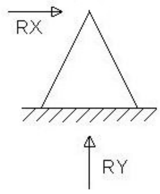
Per impedire il movimento di tale corpo occorere inserire dei *vincoli* che impediscano i 3 movimenti appena elencati; tali vincoli vengono classificati come:

a) *vincoli semplici* se eliminano un solo grado di libertà; un esempio classico di vincolo semplice è il *carrello* che impedisce la traslazione nella direzione perpendicolare al piano dove scorre

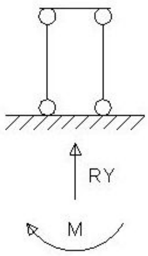


b) v*incoli doppi* se eliminano 2 gradi di libertà; esempi di vincoli doppi sono la *cerniera*

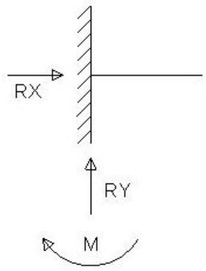
``



che impedisce qualsiasi traslazione permettendo invece la rotazione ed il *doppio pendolo* che impedisce un movimento di traslazione e la rotazione



c) *vincoli tripli* se eliminano 3 gradi di libertà; l'unico vincolo triplo nel piano è l'incastro



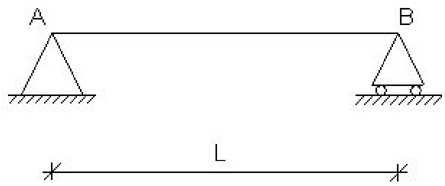
Se applichiamo delle forze o dei momenti ad un corpo vincolato in modo da annullare tutti e tre i gradi di libertà in corrispondenza dei vincoli si sviluppano delle *reazioni vincolari*; un sistema in queste condizioni si definisce in *equilibrio statico*.

Questo concetto in termini matematici si esprime grazie alle *equazioni fondamentali della statica*

$$\begin{cases} \sum Fx_i = 0 \\ \sum Fy_i = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{cases}$$

<u>Studio del comportamento cinematico</u>: se la struttura che andiamo a studiare è formata da una sola trave per verificare se non si hanno atti di moto rigido basta verificare che il numero di gradi di libertà sia uguale al numero di gradi di vincolo (condizione necessaria) e che non esista un centro istantaneo di rotazione (condizione sufficiente); se questo accade i vincoli si definiscono ben posti e la struttura è *isostatica*

Esempio 1: consideriamo una trave di luce L vincolata in A e B rispettivamente da una cerniera ed un carrello



Verifichiamo il numero di gradi di libertà e di gradi di vincolo

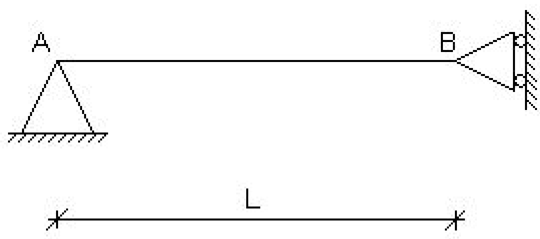
G.L.=3
G.V.=2 (A) + 1 (B) =3

il numero di gradi di libertà è uguale al numero di gradi di vincolo (la prima condizione è soddisfatta)

La cerniera in A ha il centro di rotazione nel suo centro; il carrello in B ha il centro di rotazione lungo la retta perpendicolare al suo piano di scorrimento. Non esiste quindi un centro istantaneo di rotazione (anche la seconda condizione è soddisfatta)

Poichè entrambe le condizioni sono soddisfatte il sistema è isostatico.

Esempio 2: consideriamo una trave di luce L vincolata in A e B da una cerniera ed un carrello (posti in modo diverso dal caso precedente)



Verifichiamo il numero di gradi di libertà e di gradi di vincolo

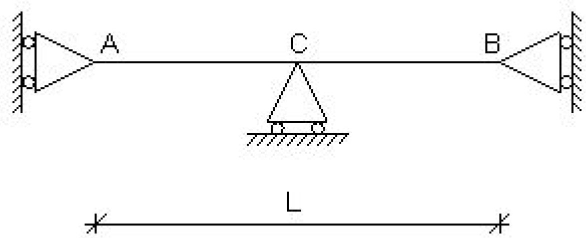
G.L.=3
G.V.=2 (A) + 1 (B) =3

il numero di gradi di libertà è uguale al numero di gradi di vincolo (la prima condizione è soddisfatta)

La cerniera in A ha il centro di rotazione nel suo centro; il carrello in B ha il centro di rotazione lungo la retta perpendicolare al suo piano di scorrimento. Esiste un centro istantaneo di rotazione, che si trova al centro della cerniera in A (la seconda condizione non è soddisfatta).

Poichè non sono soddisfatte entrambe le condizioni il sistema è un cinematismo.

Esempio 3: consideriamo una trave di luce L vincolata da 3 vincoli semplici



Verifichiamo il numero di gradi di libertà e di gradi di vincolo

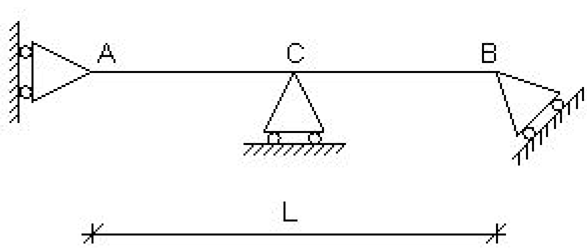
G.L.=3
G.V.=1(A) + 1(B) +1(C)=3

il numero di gradi di libertà è uguale al numero di gradi di vincolo (la prima condizione è soddisfatta)

Per quanto riguarda la seconda condizione occorre osservare che ognuno dei vincoli ha il centro di rotazione sulla retta perpendicolare al suo piano di scorrimento e passante per il centro della propria cerniera. Le tre rette si incontrano nella cerniera del carrello in C che quindi è il c.i.r. del sistema (la seconda condizione non è pertanto soddisfatta).

Conseguenza di quanto si è visto si può concludere che la struttura è un cinematismo.

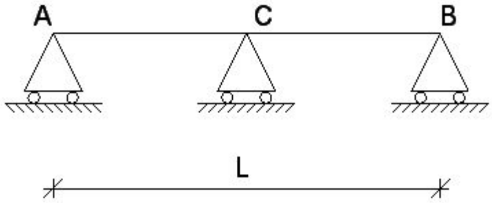
Osservazione: se orientiamo diversamente uno dei vincoli laterali non esiste più il c.i.r. quindi la struttura è isostatico



Se invece orientiamo

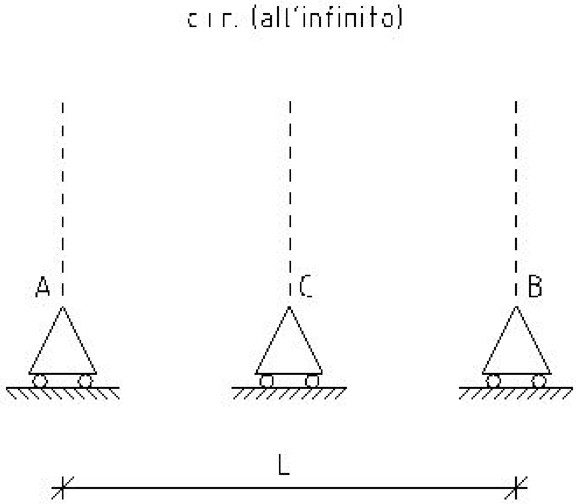
entrambi i pendoli dello stesso numero di gradi ruotandoli in senso opposto la struttura ritorna ad essere un cinematismo.

Esempio 4: vediamo ora una trave di luce L vincolata in A, C e B da tre carrelli che possoni scorrere sullo stesso piano

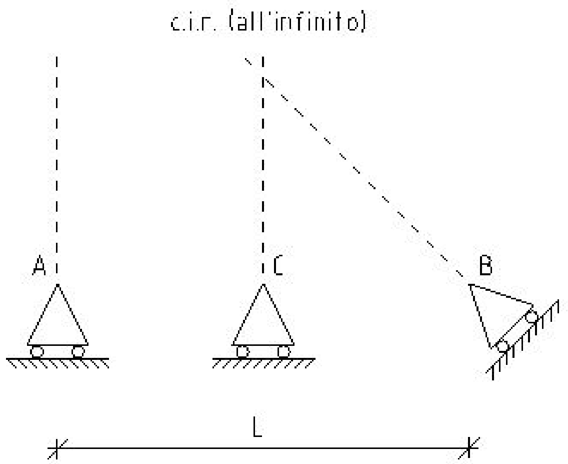


Come nei casi precedenti verifichiamo i gradi di libertà ed i gradi di vincolo del sistema

G.L. = 3
G.V. = 1 (A)+1(C)+1(B)=3



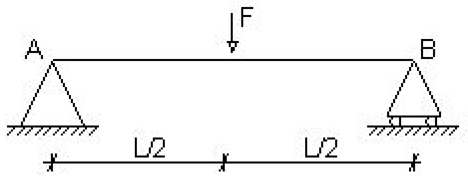
poichè G.L.=G.V la prima condizione è soddisfatta. Osservando il sistema vediamo però che esso non oppone alcuna resistenza in caso di forze orizzontali; questo si spiega considerando che un fascio di rette parallele ha come punto comune di intersezione un punto improprio che si trova all'infinito. Tale punto costituisce quindi il c.i.r. del sistema che quindi è un cinematismo.



Analogamente a quanto visto nel caso precedente anche in questo caso è sufficiente inclinare uno dei carrelli per realizzare un sistema isostatico. In questa nuova configurazione non esiste nessun punto che sia il c.i.r. per tutti e tre i vincoli e quindi il sistema può definirsi isostatico.

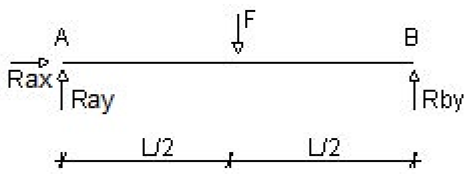
Calcolo delle reazioni vincolari: se una struttura è isostatica quando vengono applicate forze e/o momenti in corrispondenza dei vincoli vengono generate delle reazioni vincolari che impediscono il movimento della struttura. Vediamo ora alcuni esempi di calcolo di tali reazioni vincolari.

Esempio 5: data la struttura in figura verificare se il sistema è isostatico ed eventualmente determinare le reazioni vincolari



il numero di vincoli è sufficiente, infatti la struttura ha 3 gradi di libertà ed i gradi di vincolo sono 3 di cui 2 nel vincolo in A (cerniera) ed uno nel vincolo in B (carrello); i vincoli sono inoltre ben posti in quanto il centro di rotazione del vincolo in A è in corrispondenza della cerniera mentre il centro di rotazione del vincolo in B si trova sulla retta perpendicolare al piano di scorrimento del carrello e passante per il centro della sua cerniera.
In base a quanto appena indicato si può affermare che non esiste il centro istantaneo di rotazione (c.i.r.) quindi il sistema è isostatico ed è possibile calcolare le reazioni vincolari.

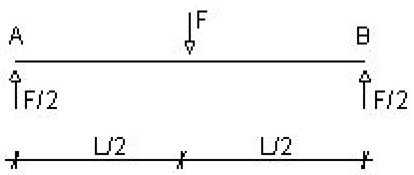
Sostituisco ai vincoli le reazioni vincolari corrispondenti



scrivo ora le equazioni cardinali della statica e le risolvo

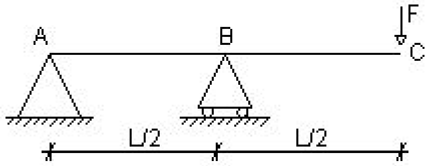
$$\begin{cases} \rightarrow R_{ax}=0 \\ \uparrow R_{ay}+R_{by}-F=0 \\ \dfrac{Fl}{2}-R_{by}l=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{ax}=0 \\ R_{ay}+R_{by}-F=0 \\ \dfrac{F}{2}=R_{by} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{ax}=0 \\ R_{ay}=\dfrac{F}{2} \\ R_{by}=\dfrac{F}{2} \end{cases}$$

se ora sostituisco le reazioni trovate nello schema precedente ottengo

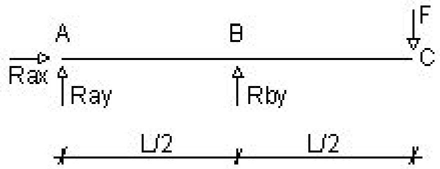


in cui vedo che le reazioni vincolari trovate sono in equilibrio con la forza applicata.

Esempio 6: data la struttura in figura verificare se il sistema è isostatico ed eventualmente determinare le reazioni vincolari



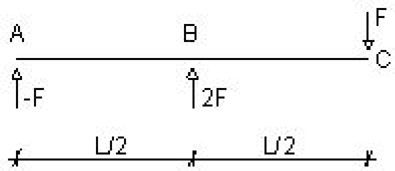
per verificare se il sistema è isostatico è sufficiente ripetere il discorso fatto all'inizio dell'esercizio precedente; sostituisco ora i vincoli con le reazioni vincolari corrispondenti



scrivo e risolvo le equazioni cardinali della statica

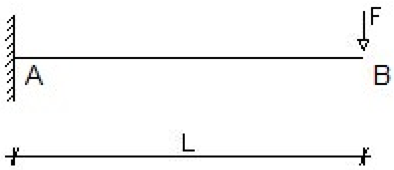
$$\begin{cases} \rightarrow R_{ax}=0 \\ \uparrow R_{ay}+R_{by}-F=0 \\ Fl-\dfrac{R_{by}l}{2}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_{ax}=0 \\ R_{ay}+R_{by}=F \\ Fl=\dfrac{R_{by}l}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} R_{ax}=0 \\ R_{ay}+R_{by}=F \\ R_{by}=2\text{F} \end{cases} \quad \begin{cases} R_{ax}=0 \\ R_{by}=-F \\ R_{by}=2\text{F} \end{cases}$$

Se ora sostituisco i valori trovati al posto delle reazioni vincolari ottengo

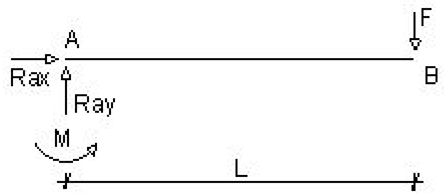


che mi dimostra l'esattezza di quanto calcolato.

Esempio 7: data la struttura in figura verificare se il sistema è isostatico ed eventualmente determinare le reazioni vincolari



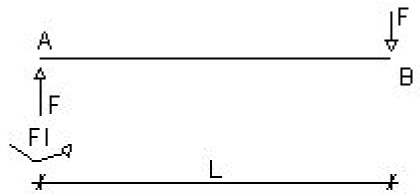
anche in questo caso il sistema è isostatico in quanto G.L.=G.V.; sostituendo al vincolo triplo presente in A le reazioni vincolari corrispondenti ottengo



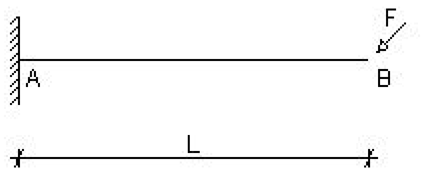
scrivo ora le equazioni della statica e le risolvo

$$\begin{cases} \rightarrow R_{ax}=0 \\ \uparrow R_{ay}-F=0 \\ -M_a+Fl=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{ax}=0 \\ R_{ay}=F \\ M_a=Fl \end{cases}$$

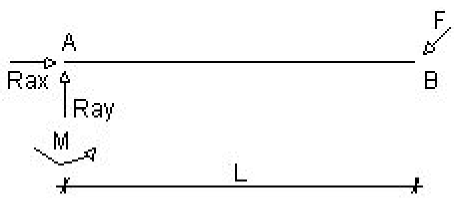
per verificare anche questa volta la correttezza dell'esercizio sostituisco le reazioni vincolari nel disegno



Esempio 8: data la struttura in figura determinare le reazioni vincolari



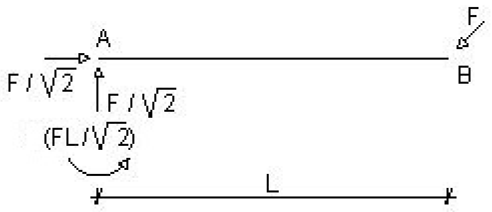
sostituisco al vincolo presente le corrispondenti reazioni vincolari ed ottengo



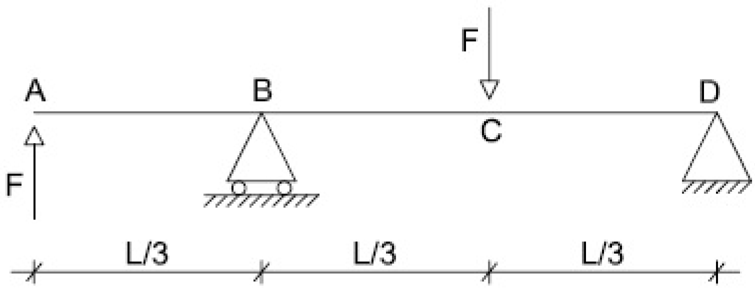
scrivo ora le equazioni della statica e le risolvo

$$\begin{cases} \rightarrow R_{ax} - \dfrac{F}{\sqrt{2}} = 0 \\ \uparrow R_{ay} - \dfrac{F}{\sqrt{2}} = 0 \\ M_a + \dfrac{F}{\sqrt{2}} l = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{ax} = \dfrac{F}{\sqrt{2}} \\ R_{ay} = \dfrac{F}{\sqrt{2}} \\ M_a = \dfrac{F}{\sqrt{2}} l \end{cases}$$

per verificare la correttezza dell'esercizio sostituisco le reazioni vincolari nel disegno



Esempio 9: dopo aver verificato che la seguente struttura è isostatica calcolare le reazioni vincolari e rappresentarle graficamente

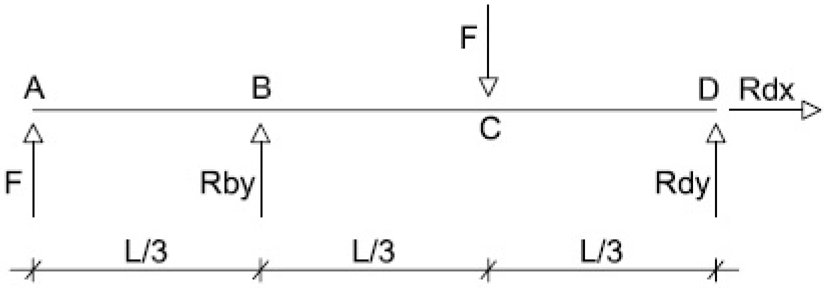


i gradi di libertà e di vincolo della struttura sono

G.L. = 3
G.V. =1(B) + 2 (D) = 3

il carrello in B ha il c.r. lungo la retta perpendicolare al piano di scorrimento e passante per la sua cerniera; la cerniera in D ha il centro di rotazione nella cerniara stessa. Poichè la retta non passa per la cerniera in D non esiste il centro di rotazione e la struttura è isostatica.

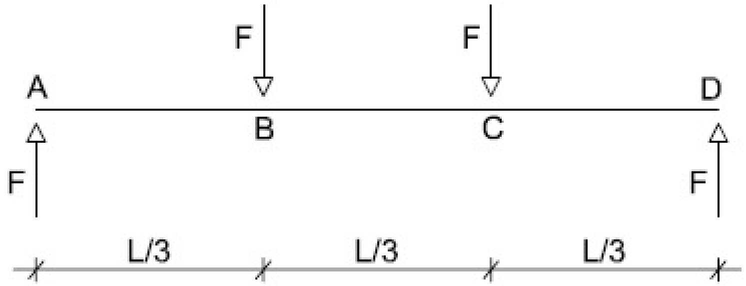
Sostituisco ora ai vincoli le reazioni vincolari corrispondenti



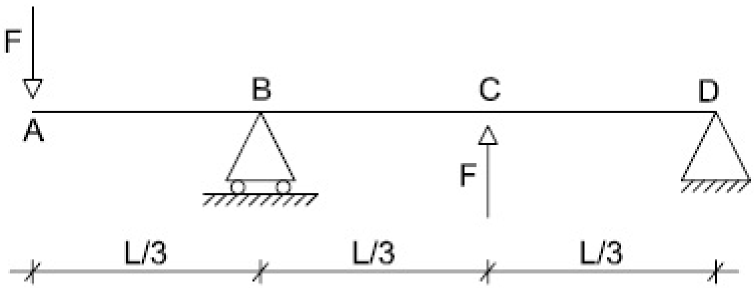
scrivo poi le equazioni cardinali della statica (scelgo il punto D come polo per calcolare i momenti)

$$\begin{cases} \rightarrow R_{dx}=0 \\ \uparrow F+R_{by}-F+R_{dy}=0 \\ Fl+R_{by}\dfrac{2}{3}l-F\dfrac{l}{3}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{by}=-R_{dy} \\ F\left(l-\dfrac{l}{3}\right)+R_{by}\dfrac{2}{3}l-F\dfrac{l}{3}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{by}=-R_{dy} \\ R_{by}=-F \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{by}=F \\ R_{by}=-F \end{cases}$$

sostituisco i valori calcolati per le reazioni vincolari nel disegno precedente ed ottengo



Esempio 10: dopo aver verificato che la seguente struttura è isostatica calcolare le reazioni vincolari e rappresentarle graficamente (la struttura è ricavata da quella dell'esercizio 9 invertendo la direzione delle forze)



La dimostrazione di isostaticità è identica a quella del caso precedente.

Scrivo ora le equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} \rightarrow R_{dx}=0 \\ \uparrow -F+R_{by}+F+R_{dy}=0 \\ -Fl+R_{by}\dfrac{2}{3}l+F\dfrac{l}{3}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{by}=-R_{dy} \\ R_{by}\dfrac{2}{3}l=F\dfrac{2}{3}l=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{dy}=-R_{by} \\ R_{by}=F \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{dy}=-F \\ R_{by}=F \end{cases}$$

e sostituisco i valori calcolati nel grafico precedente ottenendo